2024年2月2日　森本宏

数学A2（金１限）　定期試験問題

(満点 60点)

(40点はレポート)

$\boxed{1}$ 次の関数の偏導関数 z_x を求めよ（z_y は求めなくて良い）。

$$(1)z = x^2 + y^3 \quad (2)z = \sin(3x + y) \quad (3)z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$2x$ 　$3\cos(3x+y)$ 　$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$(4)z = x^2 e^y \quad (5)z = \tan^{-1}\frac{x}{y}$$

$2xe^y$ 　$\frac{y}{x^2+y^2}$

$\boxed{2}$ 次の積分を求めよ。

$$(1)\int \sin^4 x \cos x dx, \quad (2)\int \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}dx \quad (3)\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1}dx$$

$\frac{1}{5}\sin^5 x + C$ 　$-\sqrt{2-x^2} + C$ 　$e^x - \log(e^x+1) + C$

$$(4)\int_0^1 (x^3 - 2x + 2)dx \quad (5)\int_1^{\sqrt{e}} \log x dx$$

$\frac{5}{4}$ 　$1 - \frac{\sqrt{e}}{2}$

$\boxed{3}$ $f(x, y)$ が C^1 級のとき、次の関数 $g(t)$ の $g'(0)$ を求めよ。

$$g(t) = f(1 - 3t, 1 + 5t)$$

$g'(0) = -3f_x(1,1) + 5f_y(1,1)$

$\boxed{4}$ 次の関数の極値を求めよ。

$$f(x, y) = x^2 - 2xy - 2y^2$$

極値なし

$\boxed{5}$ 次の条件 $G = 0$ のもとで関数 $F(x, y)$ の極値を求めよ。

(ヒント：ラグランジュの未定乗数法)

$$G = x^2 + y^2 - 5 = 0 \text{ のもとで } F(x, y) = 6x^2 - 4xy + 3y^2$$

最大値 35 $(x,y)=(\pm 2, \mp 1)$

最小値 10 $(x,y)=(\pm 1, \pm 2)$

$\boxed{6}$ 底面が正方形の直方体がある。以下の問いに答えよ。

(1) 底面の１辺の長さが a、高さが h とする。この直方体の体積 V を a, h で表し、V の全微分を求めよ。

(2) 底面の１辺の長さが 8 cm、高さが 10cm でそれらの測定値に 0.1cm 以下の誤差があるとき、その体積を 640cm^3 とすると誤差の範囲は大よそいくらか。

(1) $V = a^2 h$, $dV = 2ah\,da + a^2 dh$

16 (2) (参考)

$dV = 2ah\,da + a^2dh$ ↓ $V = a^2h$ で割る

$\frac{dV}{V} = 2\frac{da}{a} + \frac{dh}{h}$

$a = 8 \pm 0.1$ より、

(変化量)

$-\frac{0.1}{8} \leqq \frac{da}{a} \leqq \frac{0.1}{8}$ (イメージ $-0.1 \leqq da \leqq 0.1$ より、$\frac{-0.1}{8} \leqq \frac{da}{a} \leqq \frac{0.1}{8}$)

同様に

$-\frac{0.1}{10} \leqq \frac{dh}{h} \leqq \frac{0.1}{10}$

よって、

$2\left(-\frac{0.1}{8}\right) + \left(-\frac{0.1}{10}\right) \leqq \frac{2da}{a} + \frac{dh}{h} \leqq 2\left(\frac{0.1}{8}\right) + \left(\frac{0.1}{10}\right)$

$-0.035 \leqq \frac{dV}{V} \leqq 0.035$

$V = 640\,(cm^3)$ より
体積の誤差の範囲は、

$22.4\,cm^3$ 以下 (なぜなら、$640 \times 0.035 = 22.4$)