

# 数学 A1 期末試験 2023 呼子

解答は全て解答用紙に記入してください。

問題 1. 次の極限を求めよ。ただしロピタルの定理を使ったところはその旨を記せ。

(1)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

(5)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}$

(6)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{2x^2 + 2}}{x}$

(7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x^2}}$

(8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

(9)  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x}$

問題 2. 関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \quad (x > 0)$$

を考える。

- (1)  $y = f(x)$  の増減表とグラフを凹凸込みで描け。特に極値と変曲点の座標を書き込むこと。
- (2) 関数  $f(x)$  の最大値を求めよ。
- (3)  $e^\pi$  と  $\pi^e$  の大小を比較せよ。

問題 3. 次の関数をマクローリン展開したとき、0 でないはじめの 3 項を求めよ。

(1)  $\sin 4x$

(2)  $\sin 4x \sin x$

問題 4. 高さ 1 メートルの絵が垂直な壁に掛けられている。絵の下端は床から 2 メートルの高さにある。目の高さが  $h$  メートル ( $h < 2$ ) の人が、壁から  $x$  メートル離れて絵を見上げている。絵の上端と下端を見る角度の差を  $\theta$  とする。

- (1) 角度  $\theta$  が最大となる  $x$  を  $h$  を使ってあらわせ。
- (2)  $h = 1.8$  のとき、 $\theta$  の最大値とその時の  $x$  を求めよ。

問題 5. 次の不等式を証明せよ。

$$\log x < x^{\frac{1}{2023}}$$

ただし、 $x > 0$  とする。