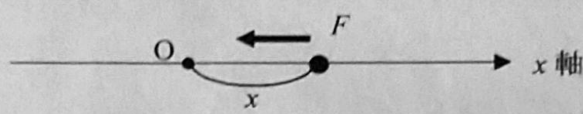
2023年度前期　力学Ⅰ　期末試験　2023年7月27日

1．以下の括弧を埋めよ。

（　①：人物名　）は、質点の運動の基礎となる３つの運動の法則を発見した。第１法則は（　②　）の法則と呼ばれ、力を受けない質点は、静止したままであるか、あるいは（　③　）運動を行うという法則、第２法則は、力を$\boldsymbol{F}$、質点の質量をm、力の方向に生じた加速度を$\boldsymbol{a}$とすると、（　④　）$=\boldsymbol{F}$と表される。この式を（　①　）の（　⑤　）という。第３法則は（　⑥　）の法則と呼ばれている。

2．以下の括弧内に適当な言葉や数式を入れよ。



単振動を表す式を導きたい。一直線上を運動する質点にある点 O からの距離に比例し、その点に向かうような（復元 ①）力 F が働くとき、その質点は単振動を行う。今、上図のように、直線に沿って x 軸をとり、点 O を原点に選んで、（①）力 F を、質点の質量を m、角振動数を ω として

$F=$（ $-m\omega^2 x$ ②　）　　(1)

とおく。

この式を用いると質点に対する運動方程式から次式が与えられる。

$\ddot{x}=$（ $-\omega^2 x$ ③　）　　(2)

右辺を左辺へ移項して、

（ $\ddot{x}+\omega^2 x$ ④　）$=0$　　(3)

ここで、解を複素関数 $z=A\,e^{\lambda t}$（A と λ は複素数）とおいて代入する。

$z=0$ 以外の解を得るためには、

（ $\omega^2+\lambda^2$ ⑤　）$=0$　（特性方程式）　　(4)

である必要があり、

$\lambda=\pm i\omega$　　(5)

正の値をとると、

$z=A\,e^{i\omega t}$　オイラー　　(6)

この式は、（　⑥　）の公式を用いることにより、

$z=A\{\cos($ ωt ⑦ $)+i\sin($ ωt ⑧ $)\}$　　(7)

また、A は複素数なので、さらに、$A=(R+iI)$と置き直して整理すると、次式となる。

$z=$（ $R\cos\omega t+I\sin\omega t$ ⑨　）$+\;i\,(R\sin\omega t+I\cos\omega t)$　　(8)

ここで、$a=\sqrt{R^2+I^2}$ 、 $\tan\phi = I/R$ 、

すなわち、$R=a\cos\phi$, $I=a\sin\phi$ とおき、(8)式に代入し、

$Z = a\cos(\omega t+\phi) + i a\sin(\omega t+\phi)$

実部を解とすれば、

$$x = (\quad ⑩ \quad) \qquad (9)$$

$a\cos(\omega t+\phi)$

虚部を解とすれば、

$$x = (\quad ⑪ \quad) \qquad (10)$$

$a\sin(\omega t+\phi)$

となり、同等の単振動の式が得られる。ここで、一般に a は（ ⑫ 振幅 ）、ϕ は（ ⑬ 初期位相 ）と呼ばれる。また、この単振動の周期 T は角振動数ωを用いて、T=（ ⑭ $\frac{2\pi}{\omega}$ ）と表せる。

ところで、力学的エネルギーを E として、一次元調和振動子における力学的エネルギー保存則の関係式は、

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + (\quad ⑮ \quad) = E \qquad (11)$$

$\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

と表すことができる。

$x = a\cos(\omega t+\phi)$

$\dot{x} = -a\omega\sin(\omega t+\phi)$

(9)式の解について、速度の式は

$$\dot{x} = (\quad ⑯ \quad) \qquad (12)$$

で与えられる。$-a\omega\sin(\omega t+\phi)$

ここに、(9)式および(12)式を(11)式に代入すると、

$$E = (\quad ⑰ \quad) \qquad (13)$$

$\frac{1}{2}m\omega^2 a^2$

が得られ、これを振動のエネルギーという。

一方、この質点を外力 $P=mF_0\sin\omega_0 t$ で強制振動させた場合、この質点の運動方程式は、

$$m\ddot{x} = (\quad ⑱ \quad) \qquad (14)$$

$-m\omega^2 x + mF_0\sin\omega_0 t$

となる。これを整理して、

$$(\quad ⑲ \quad) = F_0\sin\omega_0 t \qquad (15)$$

$\ddot{x} + \omega^2 x$

この解は、(15)式の右辺を 0 とした場合の解 x_1 と(15)式を満たす一つの解 x_2（（ ⑳ 特別 ）解）の和として求めることができる。解 x_1 は(9)式（もしくは(10)式）として既に求められているので、（ ⑳ ）解 x_2 を求めることとする。

$$x_2 = b\sin\omega_0 t \qquad (16)$$

とおいて、(15)式へ代入し、b について解くと、

$-b\omega_0^2 + b\omega^2 = F_0\sin\omega_0 t$

$$b = (\quad ㉑ \quad) \qquad (17)$$

$\frac{F_0}{\omega^2-\omega_0^2}$　　$b = \frac{F_0}{\omega^2-\omega_0^2}$

となることから、解は、

$$x_2 = (\quad ㉒ \quad) \qquad (18)$$

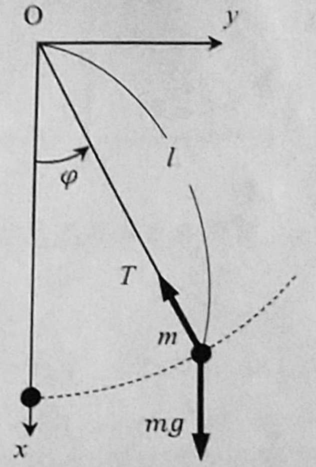
$\frac{F_0}{\omega^2-\omega_0^2}\sin\omega_0 t$

となる。したがって、(15)式の解は次式のようになる。

$$x = x_1 + x_2 = (\quad ㉓ \quad) \qquad (19)$$

ここで、$\omega=\omega_0$ の場合は、振幅が無限大となるが、この現象を（ ㉔ ）という。

3．単振り子の運動について、力学的エネルギー保存則を念頭に、以下の問いに答えよ。なお、質点の質量を m、糸の長さを l、鉛直方向と糸のなす角度をφ、そのとき糸に作用する張力をTとする。また、重力加速度をgとする。



1）右図のように座標を定義するとき（鉛直下方にx軸、水平方向に y 軸）、糸が鉛直方向から角φ 回転したときにおけるx方向、y方向の運動方程式を立てよ。

2）x、y 各方向の加速度$\ddot{x}$、$\ddot{y}$を極座標を用いてそれぞれ表現せよ。ただし、糸の長さ l は一定とする。

3）糸が鉛直方向から角φ回転したときのおもりの速さ v は$l\dot{\varphi}$と書ける。極座標表現を用いて、軌跡に対する法線方向の運動方程式（張力Tと速度vの関係）を求めよ。

4）おもりの最下点をポテンシャルの基準にとり、そのときの速度をv_0とおく。力学的エネルギー保存則を用いて、角φ回転したときにおける速度vをv_0を用いて表せ。

5）問３）、問４）の結果を用いて、糸が緩むことなく（この場合は反時計回りに）ぐるぐると回転し続けるために必要な速度v_0の条件を求めよ。

4．以下の括弧内に適当な言葉や数式を入れよ。

仕事Wが、はじめの位置Ａと終わりの位置Ｂだけで決まり、途中経路に無関係となるような性質を持つ力を（　①　）力という。（　①　）力の一例が（　②　）力である。（　①　）力の場合、（　③　）または（　④　）エネルギーと呼ばれる諸量Uと仕事Wの関係は、次式で定義される。

$$U(x,y,z)=-W(x,y,z)+\text{定数} \qquad (1)$$

これを用いると、（　①　）力 $\boldsymbol{F}(F_x,F_y,F_z)$は、以下で与えられる。

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial(⑤)},\quad F_y=-\frac{\partial U}{\partial(⑥)},\quad F_z=-\frac{\partial U}{\partial(⑦)} \qquad (2)$$

これらの式をまとめて、

$\boldsymbol{F}(F_x,F_y,F_z)=$（　⑧　）、あるいは（　⑨　）、あるいは（　⑩　）

と表すことができる。

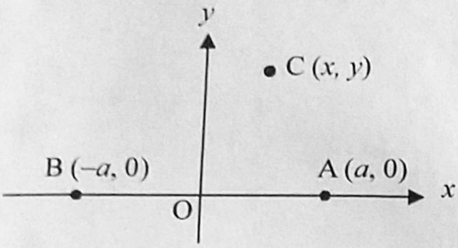
さて、２つの物体の間に働く引きあう力を（　⑪　）といい、２つの質点の質量を m と M、質点間距離を r、（　⑫　）をＧ（$=6.67\times10^{-11}\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$）とすると、（　⑪　）の作用線は両質点を結ぶ線上にあり、その大きさFは、

$F=$（　⑬　）　　$6.67\cdot10^{-11}\cdot\frac{10^{2}\cdot10\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}}$　　$6.67\cdot10^{-8}$　　(3)

と表される。例えば、２ｍ離れた体重（質量）100 kg と体重（質量）40 kg の人の間に作用する（　⑪　）は、約（　　⑭　　：小数第２位四捨五入）$\times10^{-8}$ N と非常に小さい。

複数の質点がある場合の（　⑪　）を評価する場合には、各２質点間で作用する（　⑪　）をそれぞれ求め、成分ごとの合力として評価することができる。一方、（　③　）を用いれば、スカラー量として各２質点間で作用する（　③　）の和をとった後、(2)式を用いて

（ ⑪ ）の各成分の合力を求めることができ、数学的に取り扱いが簡単になる。



左図のように、xy 平面上において、質量 M の質点Aが$(a, 0)$に、同質量の質点Bが$(-a, 0)$に、また、質量 m の質点 C が任意の座標(x, y)にある場合に、質点 A と質点 B が質点 C に及ぼす（ ⑪ ）を求めることを考える。

質点 A と質点 B の両者が、質点 C に及ぼす（ ③ ）は、

$U=$（ ⑮ ） (4)

と表せる。これより、任意の座標(x, y)の質点 C に作用する（ ⑪ ）の各成分 F_x、F_yは、(2)式を用いて、それぞれ次式で与えられる。

$F_x =$（ ⑯ ）、$F_y =$（ ⑰ ） (5)

質点 C が y 軸上の座標$(0, b)$に位置する場合に作用する（ ⑪ ）は、

$F_x =$（ ⑱ ）、$F_y =$（ ⑲ ） (6)

となる。

5．次の①～⑤の物理量を表す単位を一つ選択せよ。同じ単位を何度選んでもよい。

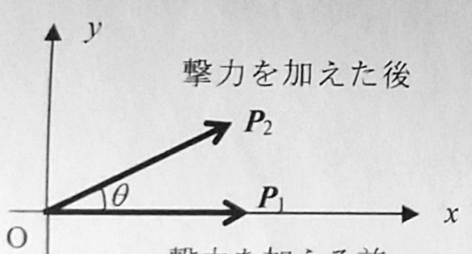
① 仕事 ② 力

③ 力積 ④ 仕事率 ⑤ 位置エネルギー

単位一覧：

a) J b) N c) W d) kg e) kg・m/s

6．速さ v で運動している質量 m の質点に撃力を加えたところ、質点は速さを変えずに運動方向を角θ だけ変えたという。撃力の力積を求めよ。



ただし、左図、xy 平面における運動量ベクトル $\boldsymbol{P}=(P_x, P_y)$において、$x$ 軸上にある撃力を加える前の $\boldsymbol{P}_1$ と、撃力を加えた後の $\boldsymbol{P}_2$ を求めたうえで、力積ベクトル $\boldsymbol{I}$ を示すこと。

7．質量 2.0 ton のケーブルカーが、水平面と30°の角をなす斜面に沿って 200 m 上がるとする。この時、以下の問いに答えよ。なお、ケーブルカーと斜面との動摩擦係数を0.5、重力加速度をg (m/s^2)とする。

1） ケーブルカーを上げるのに必要な仕事を求めよ。

2） 問 1）に関して、ケーブルカーを 1 分間で上げるために必要な動力は何ワットか。

8．水平面と角θをなす傾面上で、質量 m の質点が点 A から点 B まで滑り落ちる。重力のポテンシャルを用いて、点 B における速度 v を求めよ。ただし、点 A での初速度は 0 とし、点 A と点 B の斜面方向の距離を s、動摩擦係数をμ'とおきなさい。

9．空気抵抗のある質点の落下運動について、以下の問いに答えよ。

1）鉛直下方を x 軸として、落下運動の運動方程式を示せ。ただし、質量 m、抵抗力は$-m\gamma\dot{x}$、重力加速度をgとする。

2）問1）の質点の速度（$v=\dot{x}$）は次式で与えられるが、時間が無限大になったときの速度を求めよ。

$$v=\frac{g}{\gamma}+Ce^{-\gamma t}$$

$\frac{2+\sqrt{3}}{6}$　$\frac{10+5\sqrt{3}}{3}$

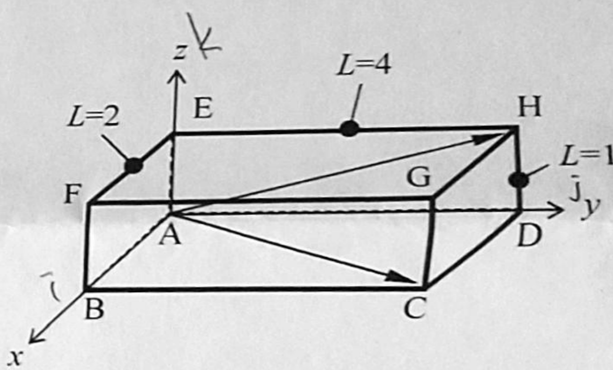
3）問2）の速度を何と呼ぶか。また、このような状態に近い現象の事例を述べよ。

0.622

１０．　右に示す A-H の頂点を持つ直方体がデカルト座標系にある。L は x, y, z 軸に平行な各辺の長さである。

1）x, y, z 軸に沿い、大きさが 1 であるようなベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ と書き、これを単位ベクトルという。A を原点におき、C の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ および点 H の位置ベクトル $\boldsymbol{r}'$を単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を用いて表現せよ。

2）AC の x, y, z 軸に対する方向余弦 l, m, n および AH の x, y, z 軸に対する方向余弦 l', m', n'を求めよ。次に AC と AH のなす角度をθとし、方向余弦を用いて $\cos\theta$を求めよ。



１１．問２．の振動問題に関連して、質点が問２の②の力と抵抗力$-2m\gamma\dot{x}$、および外力 $P=mF_0\sin\omega_0 t$ を同時に受ける場合を考える。すなわち、外力が働く場合の減衰振動について考える。下記の複素関数 z を用いた微分方程式を参照し，外力に応じた振動に相当する解（問２の⑳）を求めなさい。z については、$Ce^{i\omega_0 t}$（C は複素数）とおきなさい。

$$\ddot{z}+2\gamma\dot{z}+\omega^2 z=F_0 e^{i\omega_0 t}$$