線形代数学 I　期末試験問題

July 24, 2023

注. 90 分、持ち込み不可、解答用紙 2 枚、計算用紙 2 枚
計算用紙も集めるので名前を書いておくこと。
$a, b, c, d, e, x, y, z \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

[1]　置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 2 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ に対して次の問に答よ。

i) σ を巡回置換の積に分解せよ。

ii) 符合 $\mathrm{sgn}\,\sigma$ を求めよ。

[2]　次の行列式を計算せよ。

i) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 10 & -15 & 10 \end{vmatrix}$,　ii) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$,　iii) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 1 & 1 \\ b & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & d & 3 & 1 \\ 0 & e & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

[3]　n 次正方行列 A と、ある正の奇数 m に対し、$A^m = E$（単位行列）ならば $|A| = 1$ であることを示せ。

[4]　a, b, c, d, e, f をゼロでない実数とする時、
$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix}$ の余因子行列 $\widetilde{A}$ と逆行列 A^{-1} を求めよ。

[5]　$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ をクラーメルの公式を用いて解け。

[6]　n 次正方行列 $A_n = \begin{bmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{bmatrix}$ の行列式は

$|A_n| = 1 + x^2 + \cdots + x^{2n}$ となる事を証明せよ.（例えば帰納法で.）